TEORI GRAF DAN APLIKASINYA

Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., PhD

SEMINAR RUTIN JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS ANDALAS

25 APRIL 2019

Teori Graf berkembang setelah Leonhard Euler pada tahun 1736 menjawab masalah yang dihadapi orang-orang di Konigsberg yang berusaha melewati tujuh jembatan yang berada di atas Sungai Pregel. Jawaban Euler terhadap masalah ini menghasilkan konsep sirkuit Eulerian (jalan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama dan memuat setiap sisi dari sebuah graf), yang merupakan awal dari lahirnya Teori Graf. Sejak itu konsep-konsep lain dalam Teori Graf bermunculan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Masalah optimasi jaringan komputer merupakan masalah yang sering dipecahkan melalui pendekatan Teori Graf. Jika diberikan sebuah himpunan komputer, maka muncul pertanyaan bagaimana komputer-komputer itu dihubungkan agar tercapai komunikasi yang paling efisien dan reliabel dengan biaya sehemat mungkin? Tujuan akhirnya adalah terbangunnya sebuah jaringan komputer yang jangkauan luas. Topologi dari sebuah jaringan komputer lebih mudah jika dipelajari dengan menggunakan instrumen Teori Graf, yaitu setiap komputer pada jaringan tersebut direpresentasikan dengan titik, dan koneksi antar komputer direpresentasikan dengan sisi.

Masalah lain adalah penetapan alamat yang efisien pada jaringan komunikasi dikenalkan oleh Bloom dan Golomb pada tahun 1978. Penetapan alamat pada kemungkinan *link* dalam jaringan komunikasi mensyaratkan semua alamat harus berbeda. Dalam hal ini, alamat *link* dapat disimpulkan dari identitas dua terminal pengguna yang terhubung tanpa memerlukan table *lookup*. Dalam konteks Teori Graf, masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan pelabelan graf. Kedua masalah tersebut merupakan dua contoh dari berbagai aplikasi Teori Graf. Masih banyak aplikasi Teori Graf lainnya baik untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan seharihari maupun masalah dalam bidang ilmu yang lain. Dalam buku ini akan disajikan konsep dasar Teori Graf beserta aplikasinya seperti untuk optimasi jaringan komputer; penetapan alamat jaringan komunikasi; navigasi robot; sistem penjadwalan; dan optimasi penempatan alat.

dreamlitera
Anggota Ikapi
dream.litera@gmail.com
www.dreamlitera.com

ISBN:978-602-5518-70-6
9 786025 518706

TEORI GRAF DAN APLIKASINYA

SLAMIN

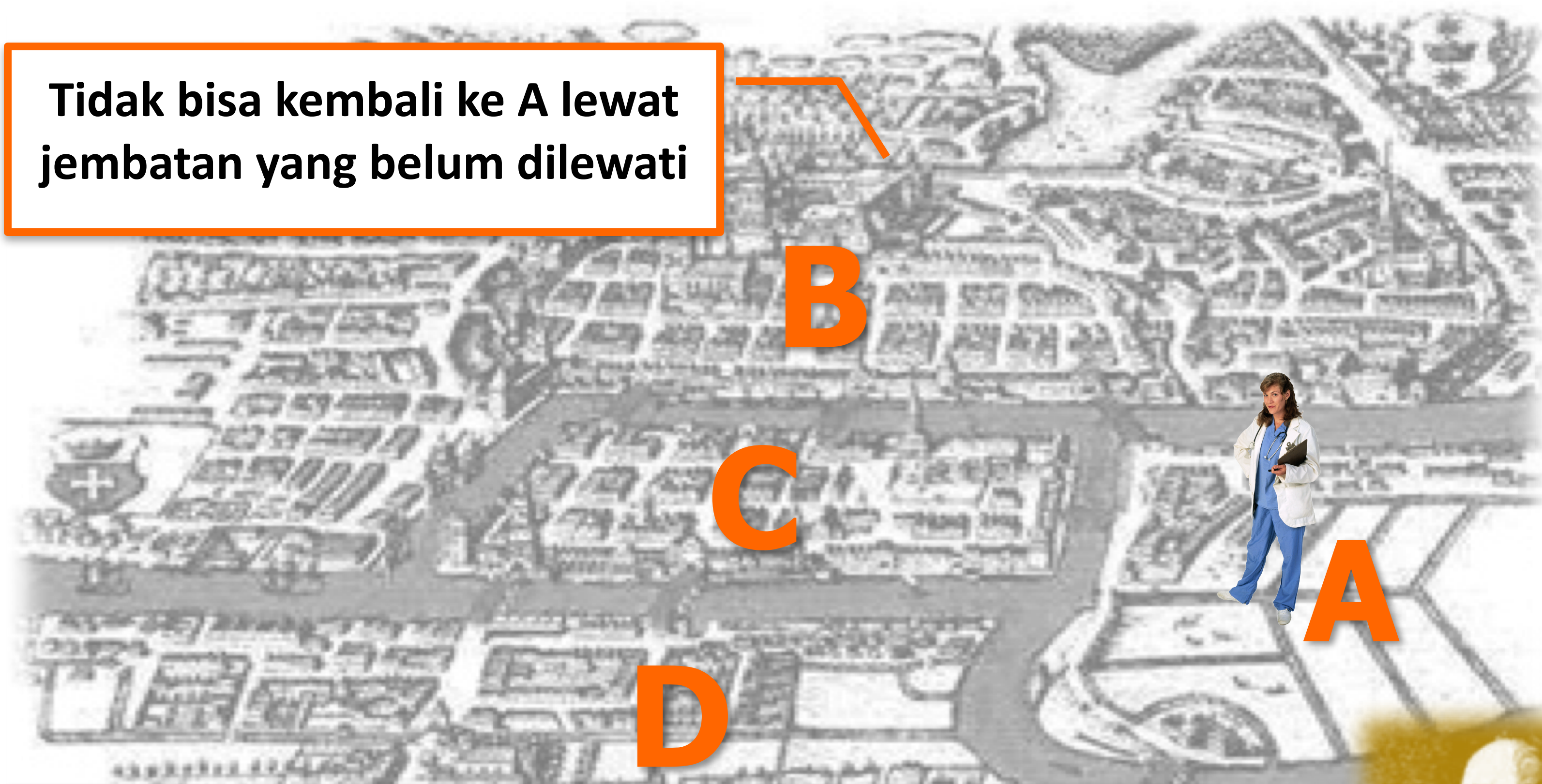
dreamlitera

TEORI GRAF DAN APLIKASINYA

SLAMIN

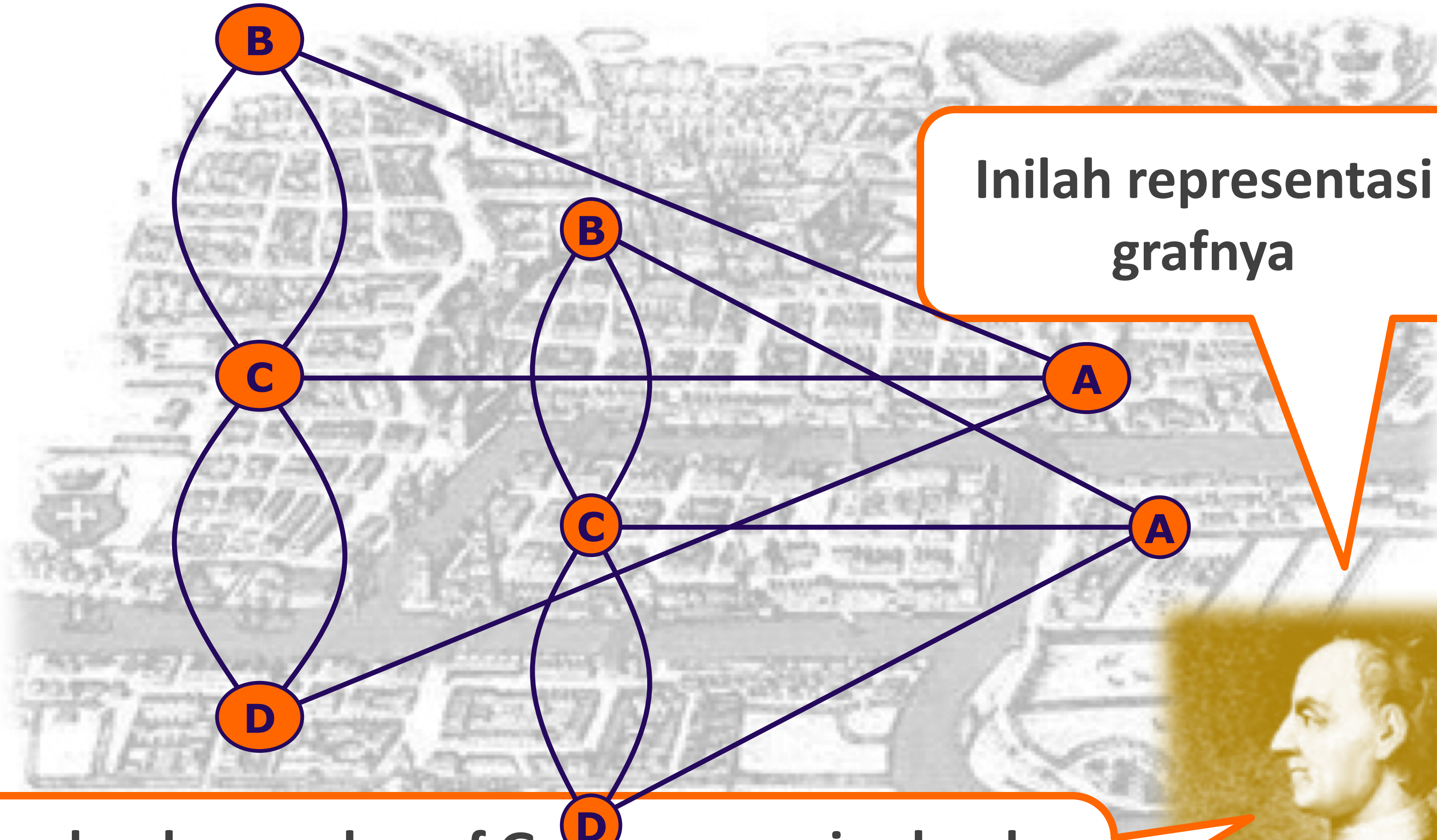
Sejarah Teori Graf

Tidak bisa kembali ke A lewat jembatan yang belum dilewati



Tidak mungkin bisa kembali ke A lewat setiap jembatan, karena ada daerah yang jumlah jembatannya tidak genap

Masalah Jembatan Konigsberg



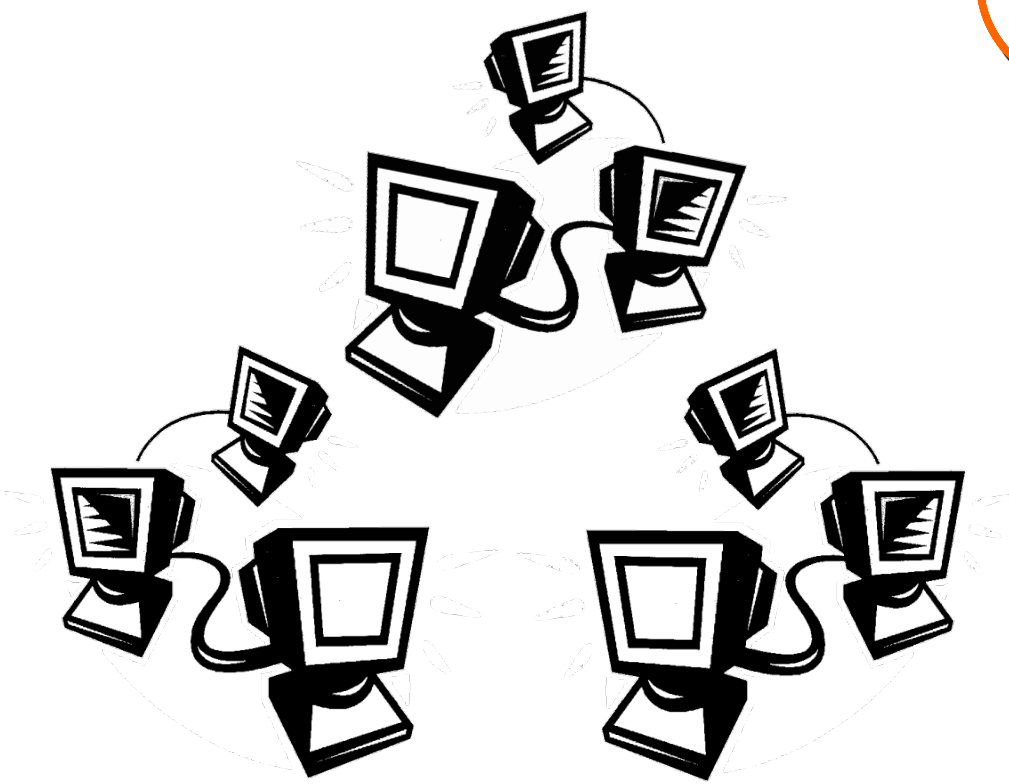
Inilah representasi grafnya

Jika sebuah pseudograf G mempunyai sebuah sirkuit Eulerian, maka graf tersebut terhubung dan derajat setiap titiknya adalah genap.

Aplikasi Teori Graf

Optimasi Jaringan Komputer

Tersedia beberapa komputer untuk sebuah jaringan

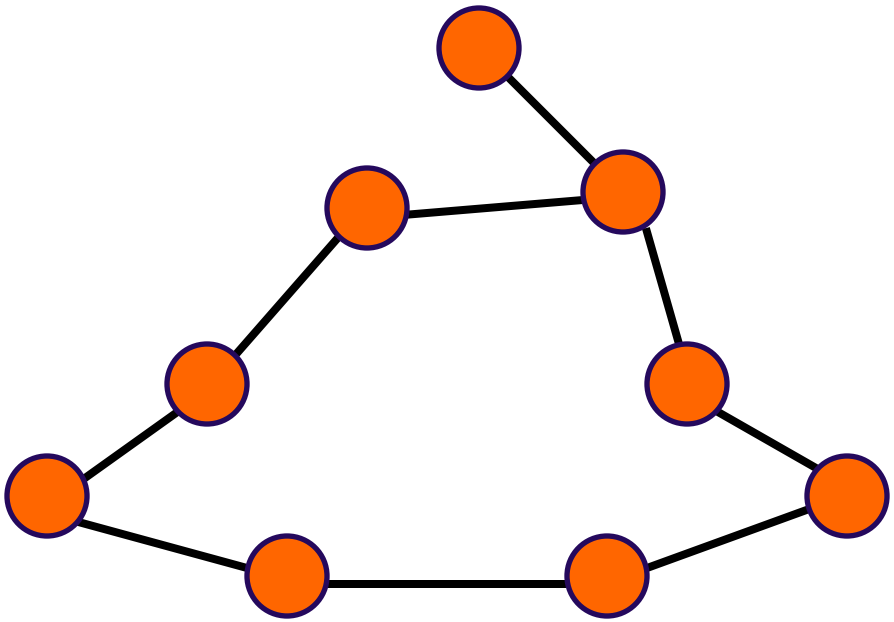


Bagaimana cara menghubungkan?

Optimal

- Efisien
- Reliabel

Representasi Jaringan Komputer

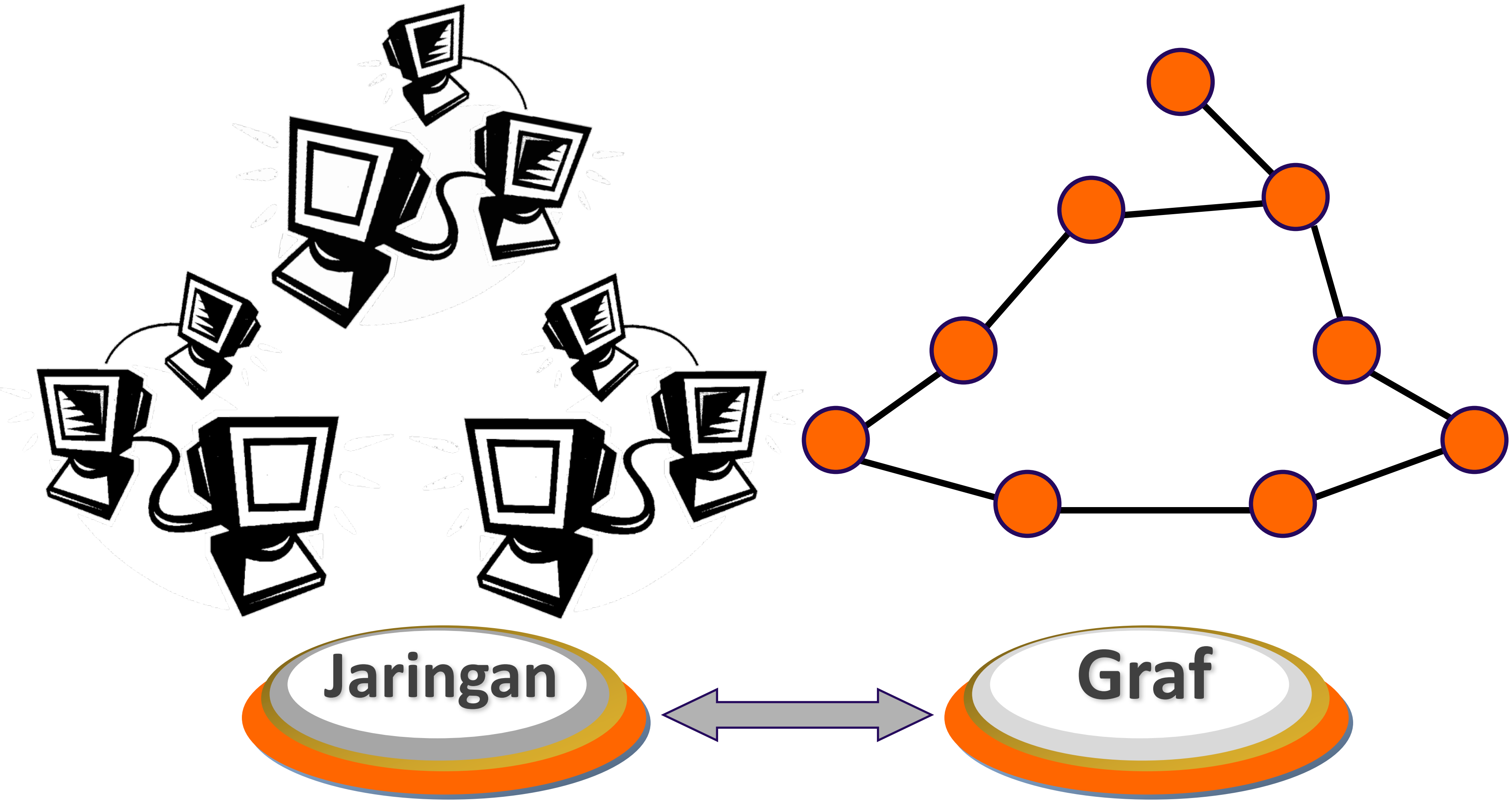


komputer = titik

koneksi = sisi

Jaringan ⟷ Graf

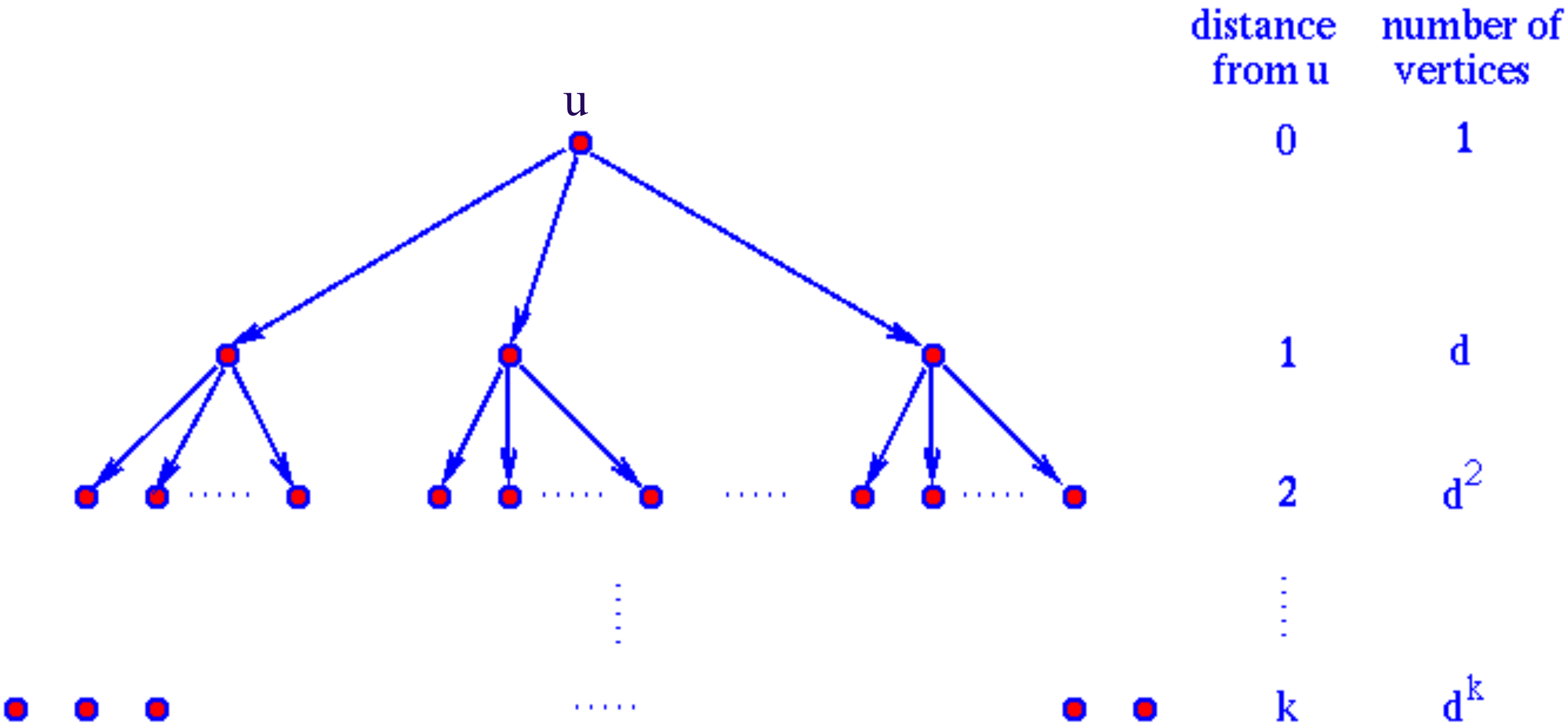
Representasi Jaringan Komputer



Masalah Optimasi Graf

Bagaimana mengkonstruksi graf dengan jumlah titik sebanyak mungkin, jika derajat yang diberikan adalah maksimum *d* dan diameternya *k* ?

Masalah Optimasi Graf



$$n_{d,k} \le 1 + d + d^2 + \ldots + d^k = \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1}$$

Moore bound

Masalah Optimasi Graf

Secara umum, batas atas (Moore bound) tidak bisa dipenuhi. Jika dipenuhi, maka disebut Moore digraph

Moore digraphs hanya ada untuk kasus trivial yaitu ketika $d = 1$ atau $k = 1$ [Bridges dan Toueg, 1980].

Penelitian berlanjut pada pada studi tentang keberadaan digraph yang besar dengan ordo mendekati batas atas (Moore bound) untuk $d \geq 2$ dan $k \geq 2$

Masalah Optimasi Graf

Fokus Penelitian

Membuktikan ketidakberadaan digraph yang mempunyai ordo mendekati Moore bound

[Baskoro, Miller, Siran and Sutton, 2005; Bridges and Toueg, 1980; Miller and Siran, 2001];

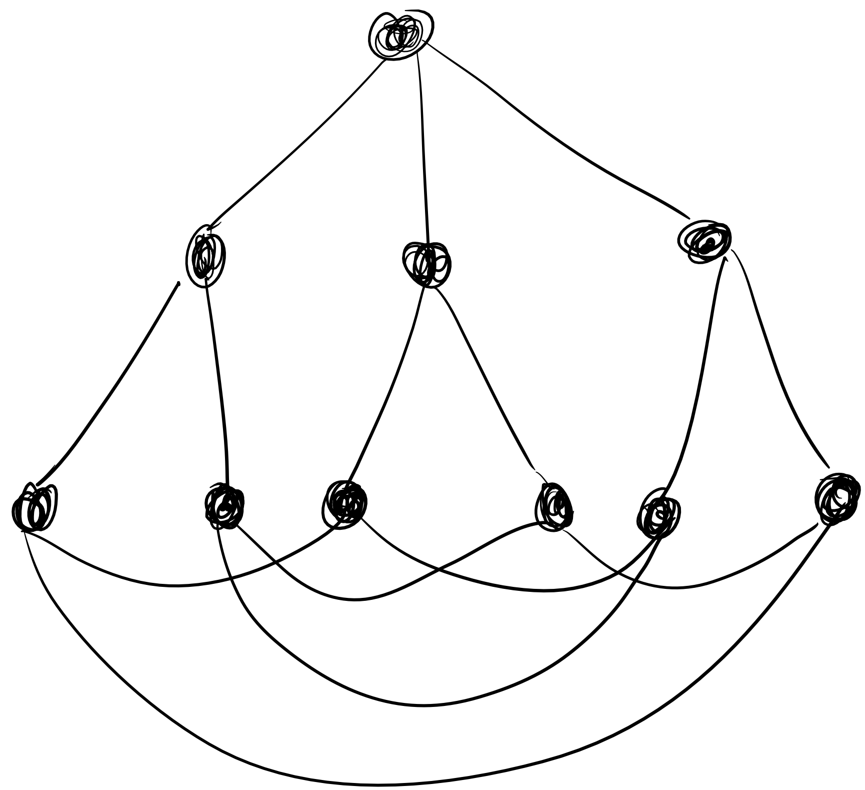
Konstruksi graf berarah besar (digraph)

[Imase and Itoh, 1983; Comellas and Fiol, 1990;
Fiol, Yebra and Alegre, 1984].

Cara Konstruksi Graf

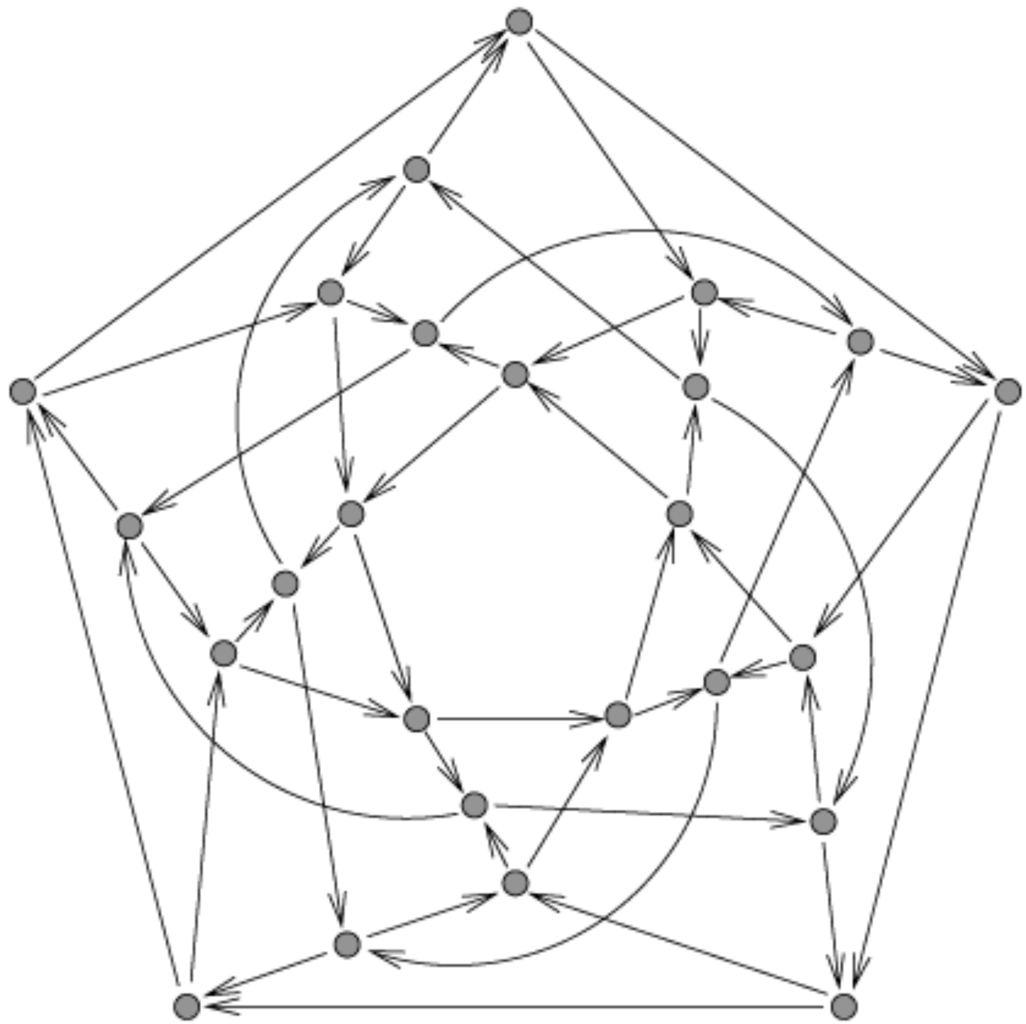
- Menggambar menggunakan tangan
- Menggunakan komputer
- Spesifikasi aljabar
- Menggunakan graf dasar

Menggunakan Tangan



Petersen Graph.

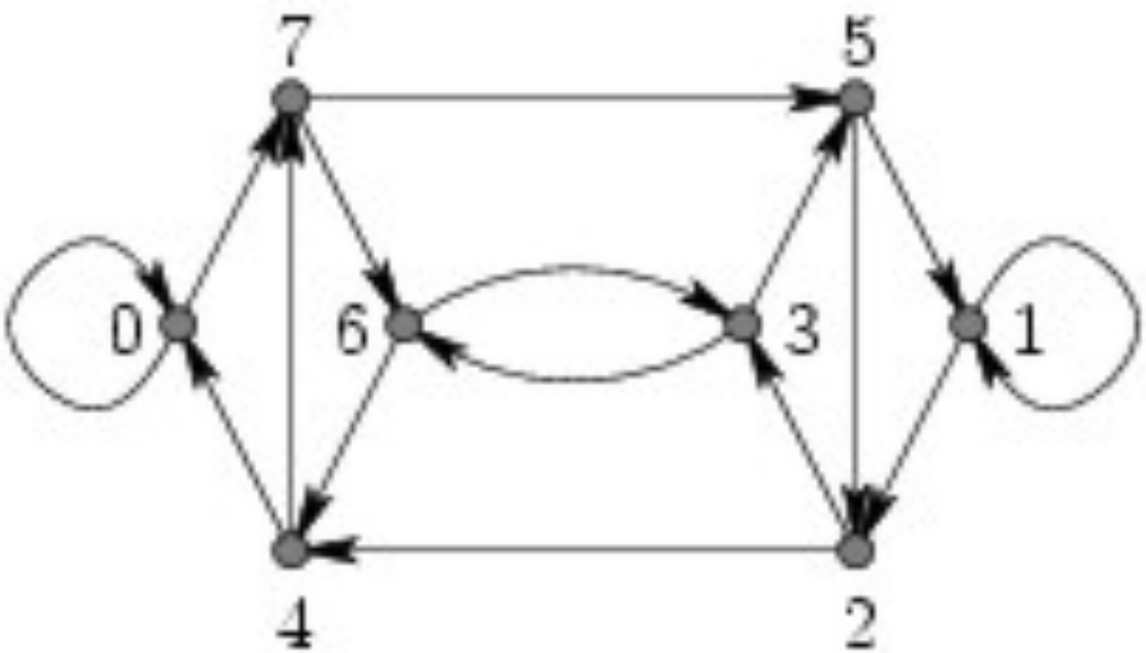
Menggunakan Komputer



Alegre Digraph

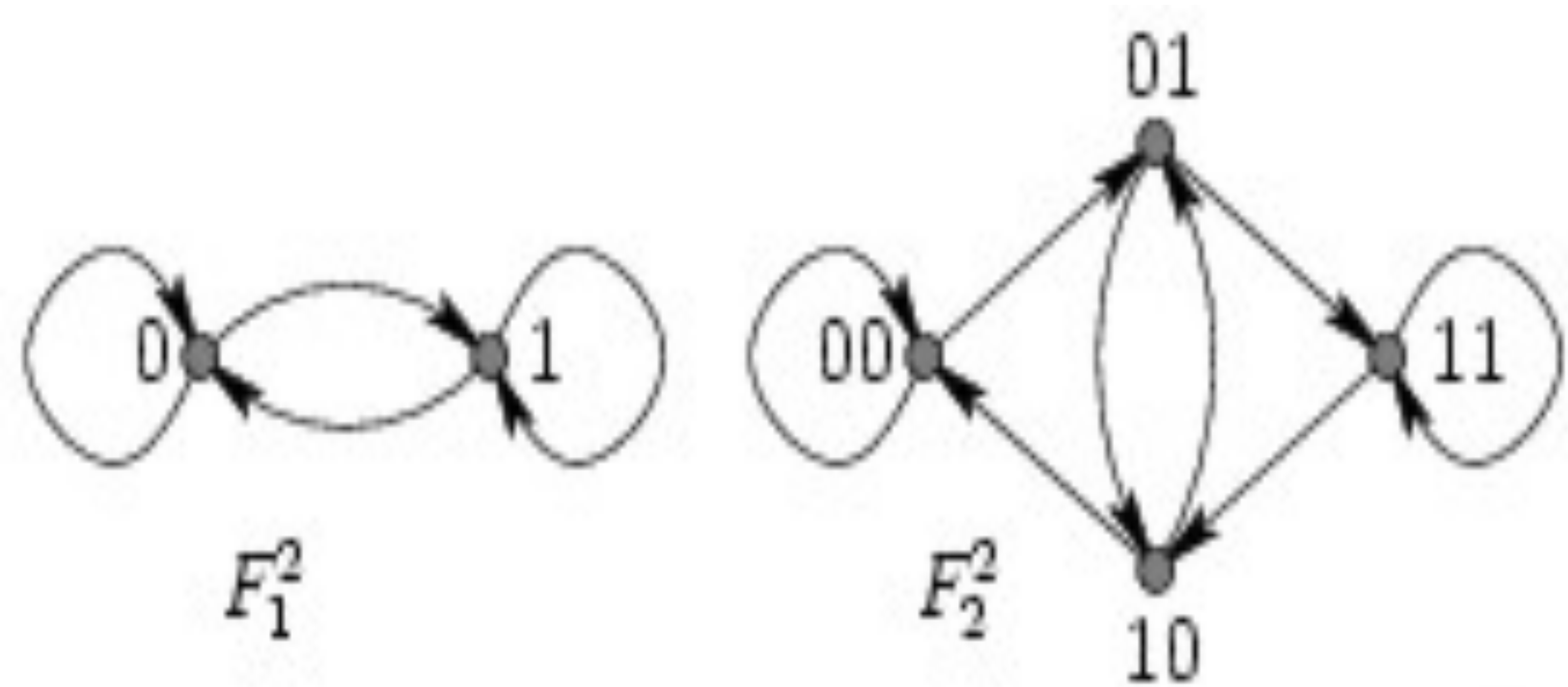
Spesifikasi Aljabar

Vertex u is adjacent to v whenever
$v \equiv du - i \pmod{n}$, $i = 0,1,\ldots,d-1$.



de Bruijn digraph

Menggunakan Graf Dasar



Base digraph dan line digraph

Teknik Konstruksi Graf

Imase and Itoh (1981)

Generalised de Bruijn digraphs

Imase and Itoh (1983), Miller (1986)

Generalised Kautz digraphs

Fiol, Yebra, and Alegre (1984)

Line digraph of F_k^d digraph

Baskoro, Brankovic, Miller, Ryan, Siran (1997)

Voltage Assignment

Teknik Konstruksi Graf

Miller and Fris (1988)

Digon Reduction

Fiol, Llado and Villar (1988)

Generalised Kautz digraphs on alphabets

Fiol and Llado (1992)

Partial line digraphs

Miller and Slamin (2000)

Vertex Deletion Scheme

Masalah Optimasi Graf

HASIL PENELITIAN

- Keteraturan graf berarah hampir Moore
- Teknik konstruksi graf berarah dengan diameter minimal
- Kemonotonan diamater minimal terhadap ordo dan derajat keluar maksimal
- Keteraturan graf berarah berordo mendekati batas Moore

Penetapan Alamat Jaringan

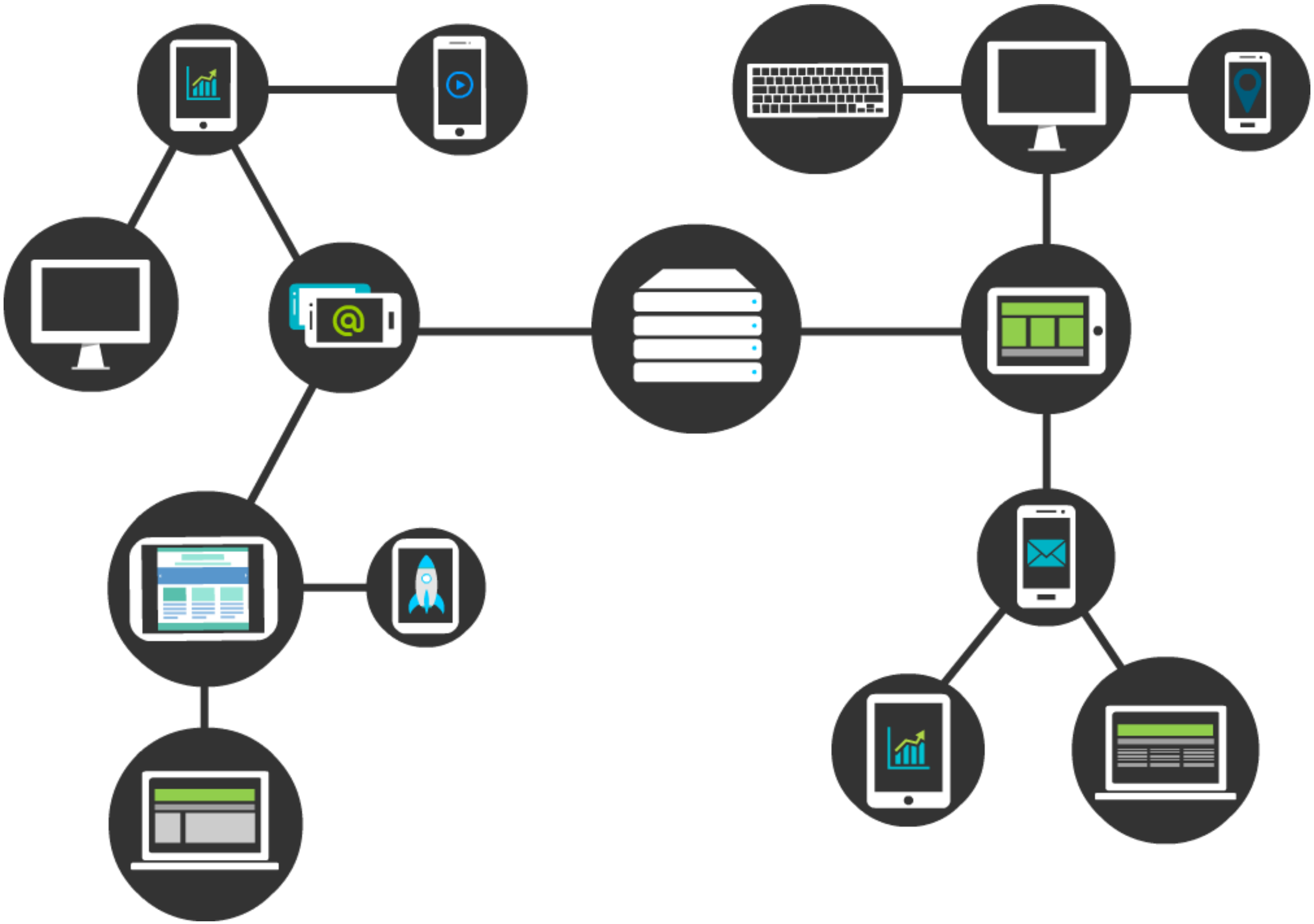
Bloom dan Golomb, 1978

- menggunakan pelabelan semi-graceful
- terminal pengguna diberi alamat sesuai dengan label titik dari graf
- alamat dari link komunikasi merupakan selisih antara label-label pada titik-titik ujungnya

Marr dan Wallis, 2013

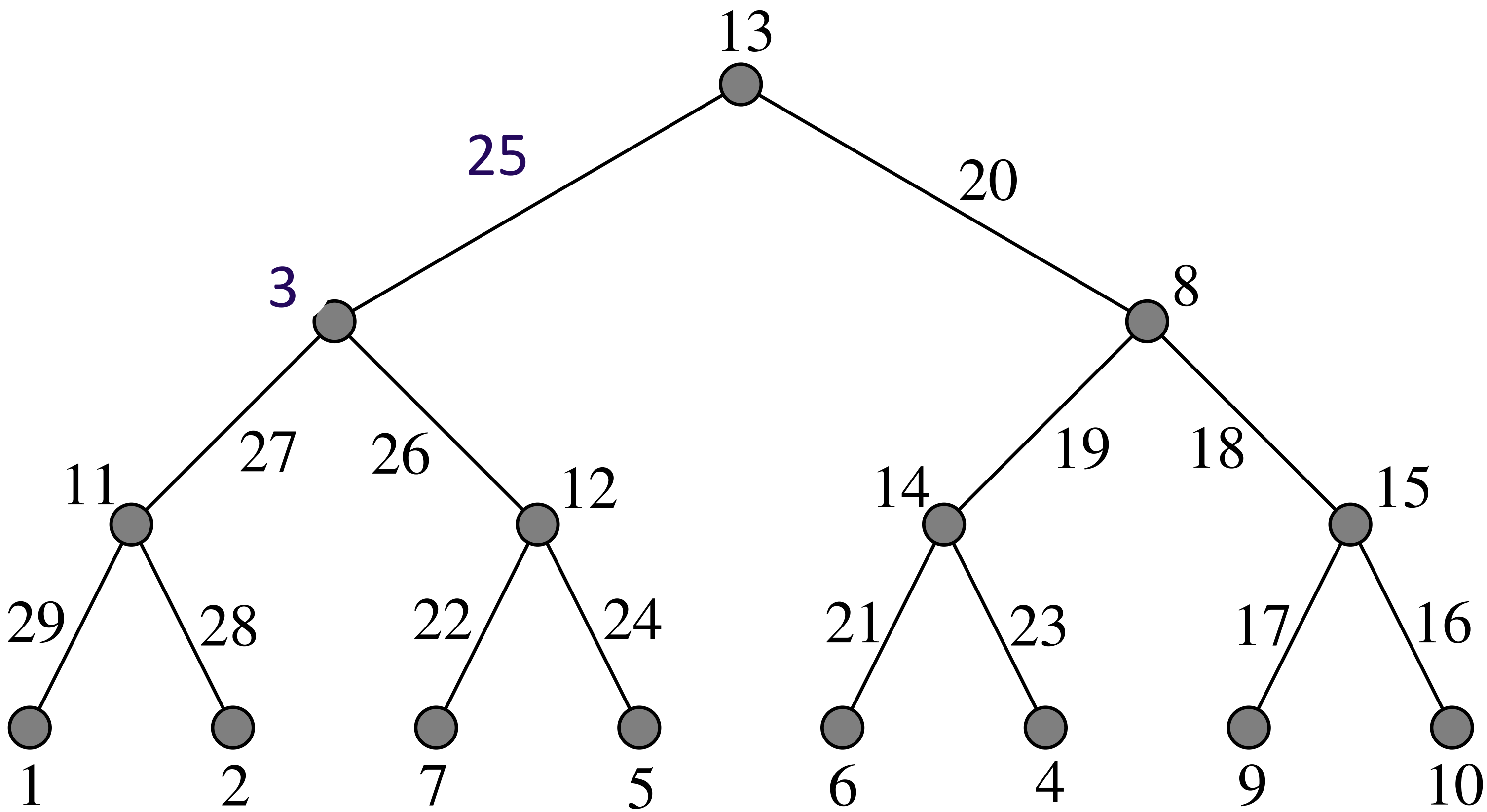
- menggunakan pelabelan total sisi ajaib
- terminal pengguna dan link diberi alamat sesuai dengan label titik dan sisi dari graf
- alamat dari link komunikasi merupakan hasil perhitungan dari bobot dikurangi label kedua titik ujungnya

Penetapan Alamat Jaringan



Penetapan Alamat Jaringan

MENGGUNAKAN PELABELAN TOTAL SISI AJAIB



Konstanta sisi ajaib k = 41

Pelabelan Graf Ajaib

DEFINISI

Pelabelan total sisi ajaib

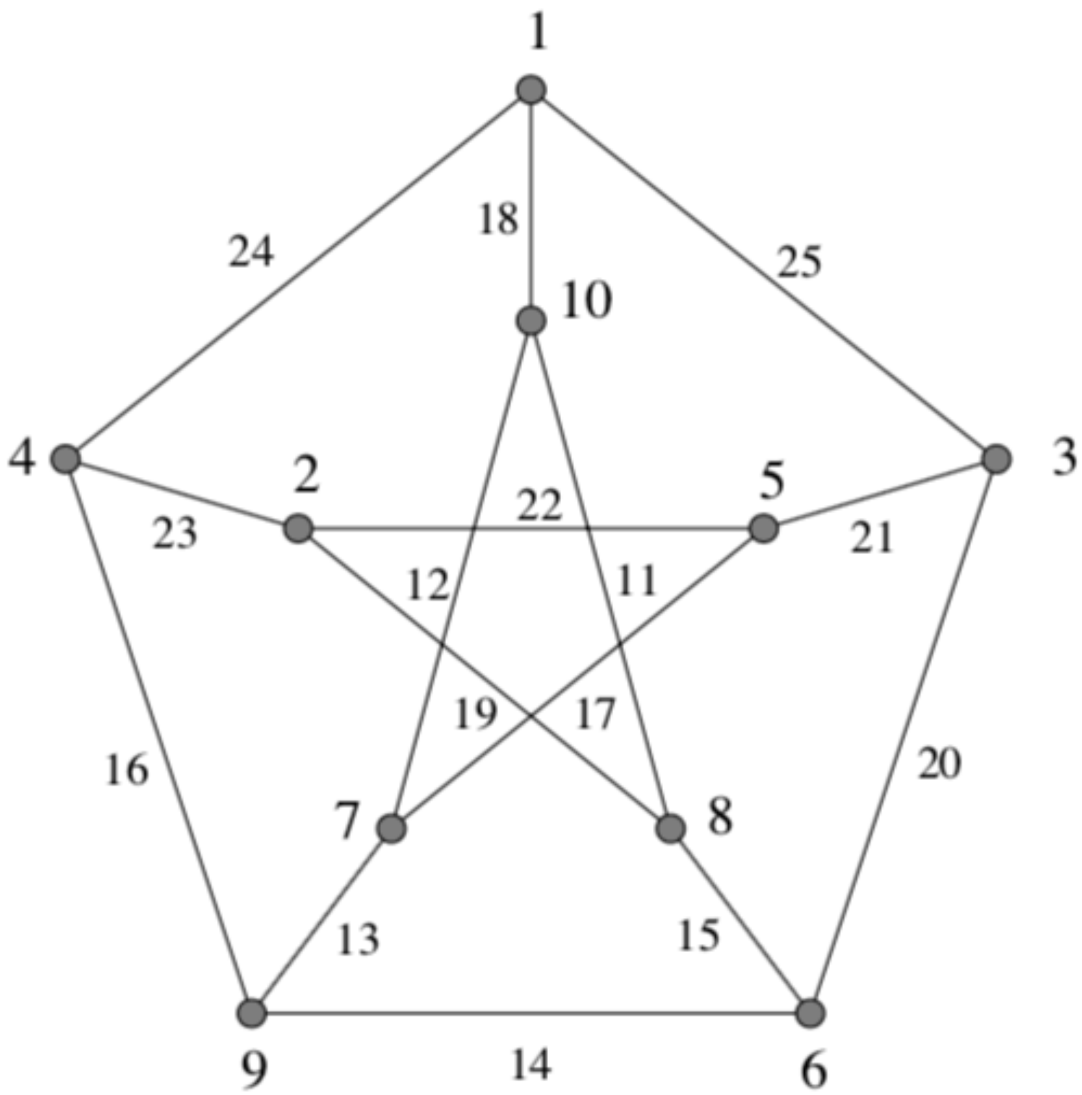
Pemetaan satu-satu λ dari $V \cup E$ ke 1, 2, ..., $|V|+|E|$ sehingga setiap sisi (u,v) berlaku $\lambda(u) + \lambda(u,v) + \lambda(v) = k$

$\lambda(u) + \lambda(u,v) + \lambda(v)$ disebut bobot dari sisi (u,v) dan konstanta k disebut konstanta ajaib

(Kotzig dan Rosa, 1970)

Pelabelan Graf Ajaib

CONTOH



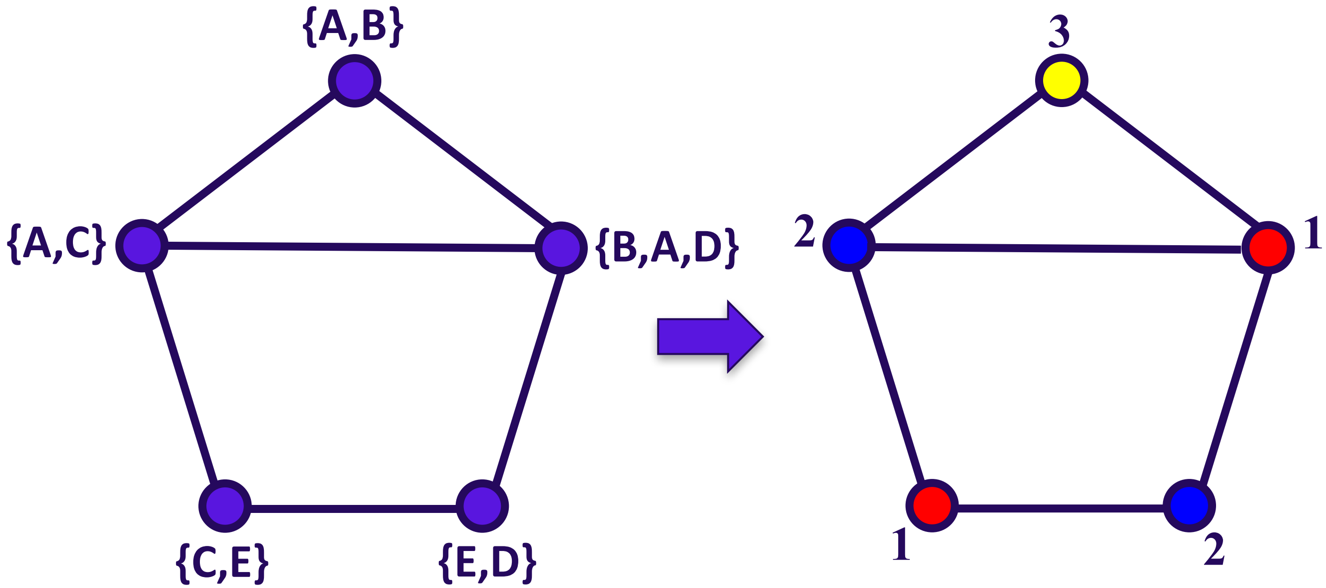
Pelabelan total sisi ajaib pada graf Petersen

Sistem Penjadwalan

MASALAH

Lima dosen yaitu A, B, C, D dan E menjadi penguji dari lima ujian skripsi yang terbagi menjadi {A,B}, {A,C}, {B,A,D}, {C,E} dan {E,D} (dimana himpunan menunjukkan dosen yang menguji skripsi yang sama). Berapa waktu paling sedikit yang diperlukan untuk menyusun jadwal ujian skripsi tersebut?

Sistem Penjadwalan



Waktu	Penguji Skripsi
1	{B,A,D}, {C,E}
2	{A,C}, {E,D}
3	{A,B}

Pewarnaan Graf

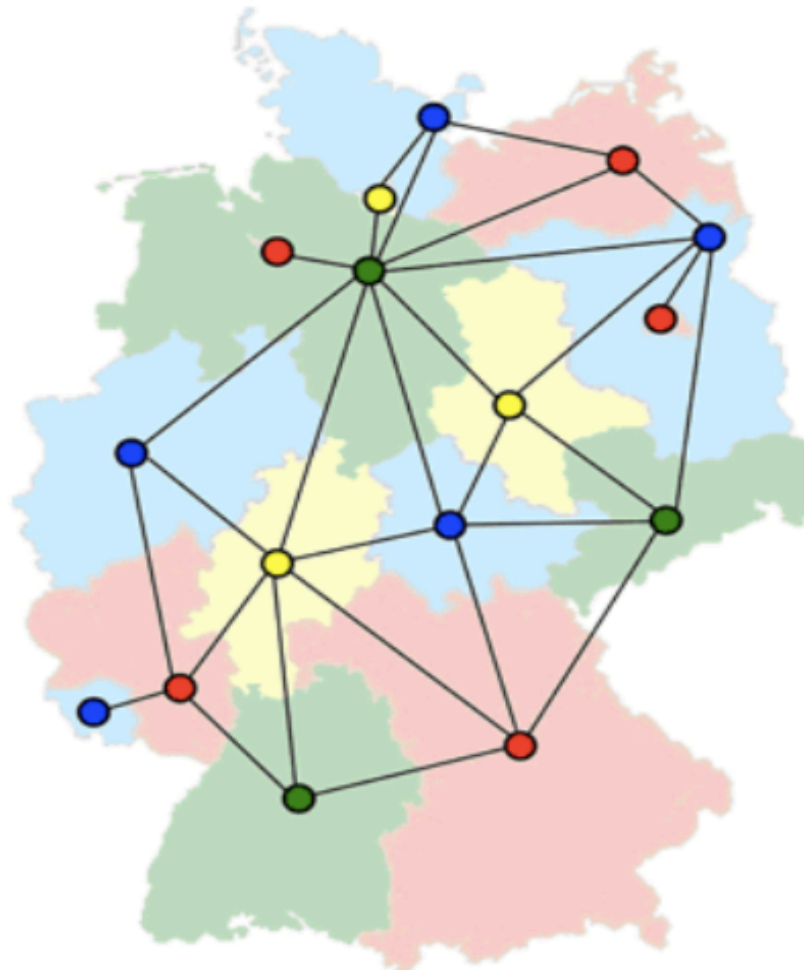
Bermula dari pewarnaan peta negara dan tidak boleh ada dua negara berbatasan mempunyai warna yang sama

Fenomena ini direpresentasikan dalam bentuk graf planar dengan negara sebagai titik dan perbatasan sebagai sisi

Masalah ini dikenal dengan *Four Color Problem* yang muncul dalam surat De Morga ke Hamilton pada tahun 1852

Diselesaikan secara formal pada tahun 2005 oleh Gonthier

Pewarnaan Graf



Peta negara-negara dan representasinya dalam graf

Sumber: Max Planck Institute for Dynamics and Self-Organization, 2009

Pewarnaan Graf

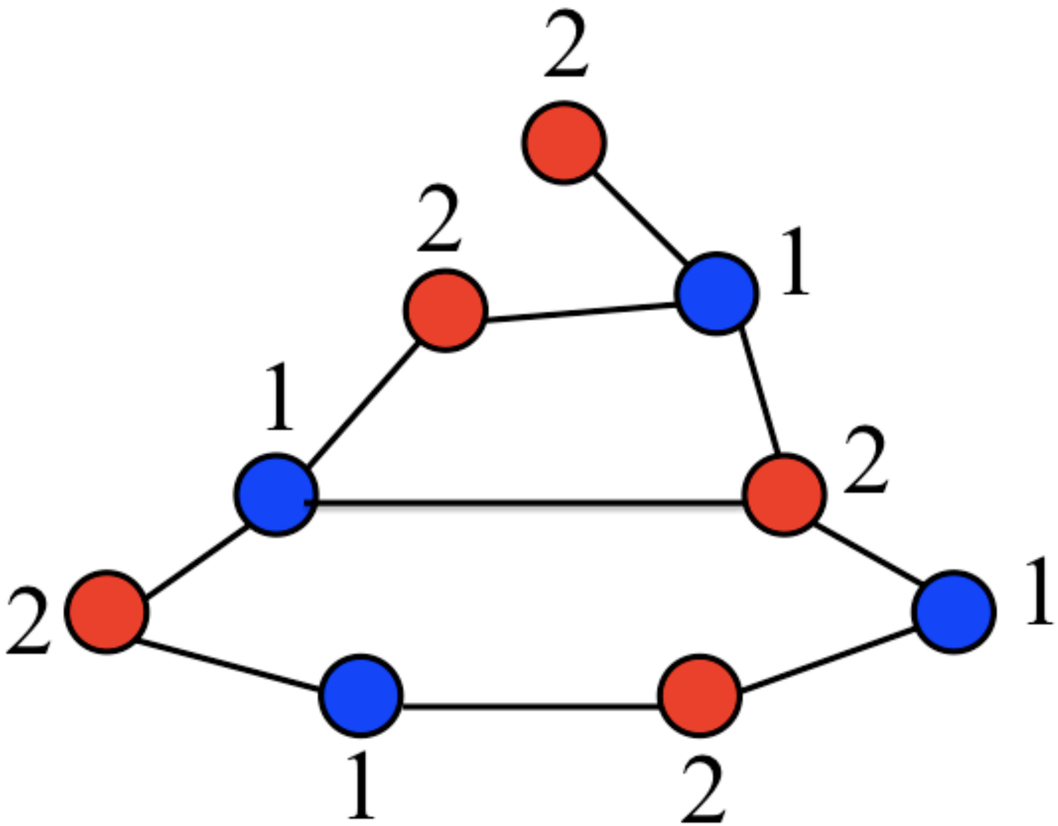
Pewarnaan-k dari graf G merupakan pemetaan $c : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dimana V adalah himpunan titik-titik dan $c(v)$ disebut warna dari titik v sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk setiap sisi uv pada G.

Bilangan bulat positif k terkecil sedemikian hingga G memenuhi pewarnaan-k disebut *bilangan kromatik* dari G

(Demange, Ekim, Ries, & Tanasescu, 2014)

Pewarnaan Graf

CONTOH



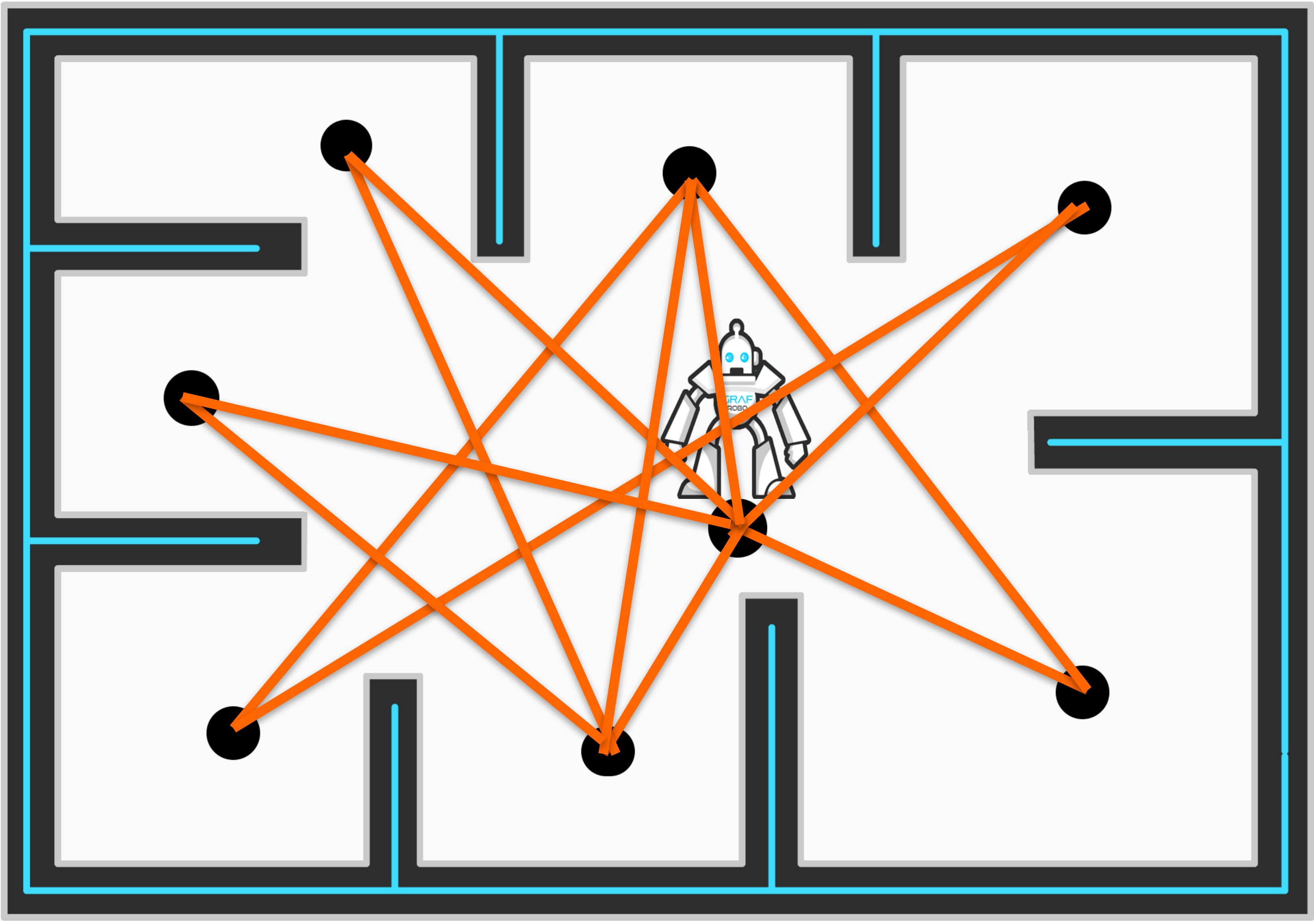
Pewarnaan Titik pada Graf dengan Bilangan Kromatik 2

Navigasi Robot

- Robot bergerak dari satu titik ke titik lainnya dengan meminimalkan kesalahan menerjemahkan kode
- Setiap titik harus menyediakan kode unik
- Agar gerak robot efisien maka robot harus cepat menerjemahkan kode
- Untuk itu titik lokasi harus mempunyai kode seminimal mungkin

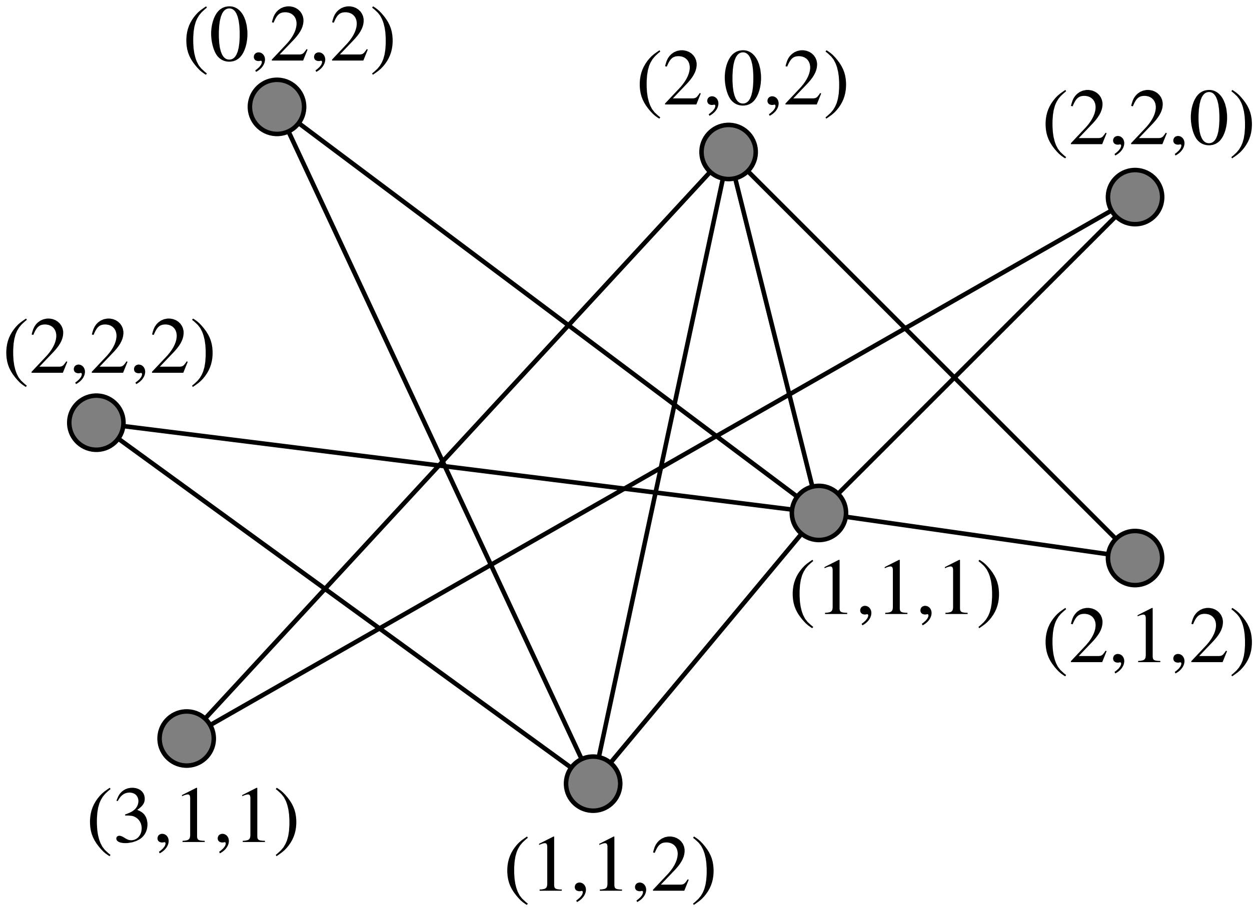
Jika komponen kode titik lokasi menggunakan pengertian jarak maka dalam Teori Graf dikenal dengan *dimensi metrik*

Navigasi Robot



Navigasi Robot

MENGGUNAKAN DIMENSI METRIK



Dimensi Metrik

DEFINISI

Misalkan G adalah graf terhubung yang berordo n, $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subseteq V$ adalah himpunan terurut dan v adalah titik pada graf G.

Representasi titik v terhadap W adalah pasangan berurut *k-tuple*, $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots, d(v,w_k))$ dimana $d(v,w)$ jarak titik v dan titik w.

Himpunan W disebut **himpunan pembeda** dari G jika setiap titik di G memiliki representasi yang berbeda terhadap W.

(Chartrand, Eroh, Johnson, dan Oellermann, 2000)

Dimensi Metrik

DEFINISI

Himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas minimal disebut **basis**

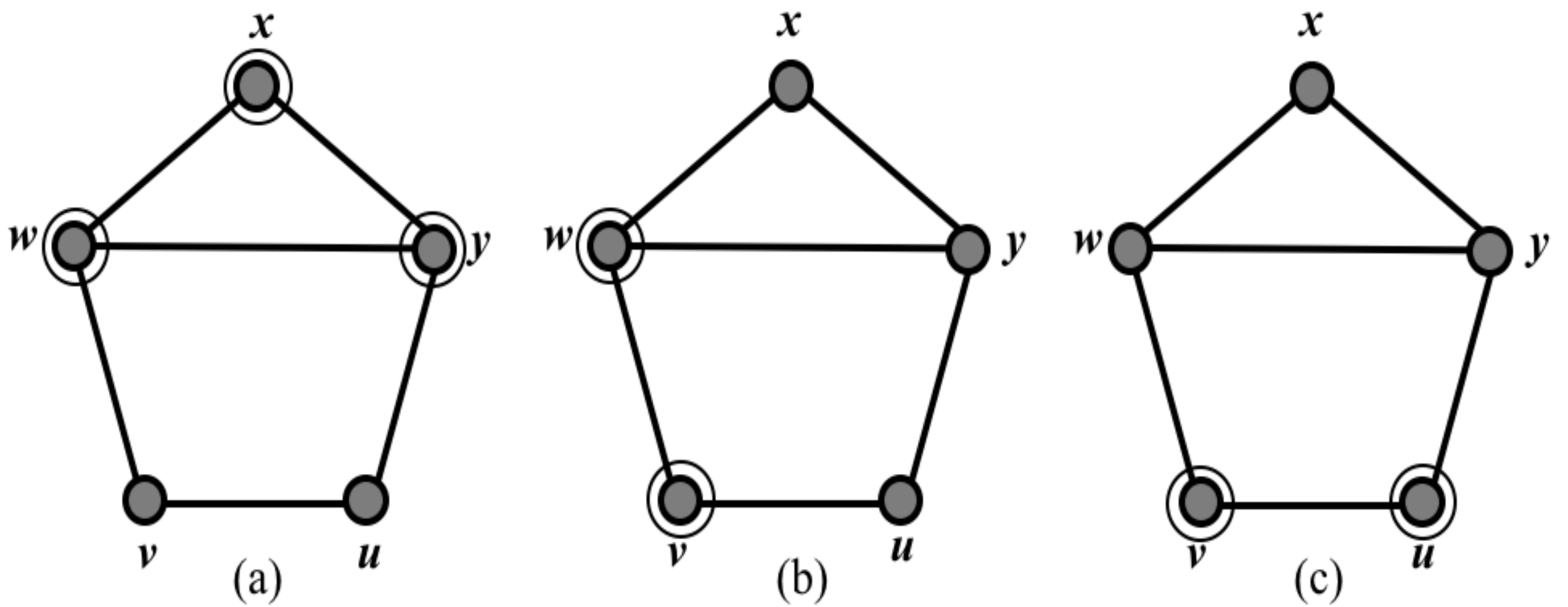
Banyaknya titik pada basis graf *G* disebut dimensi, dinotasikan dengan **dim(*G*)**

Karena konsep dimensi pada graf menggunakan jarak (metrik), maka lebih dikenal dengan sebutan **dimensi metrik**

(Chartrand, Eroh, Johnson, dan Oellermann, 2000)

Dimensi Metrik

CONTOH



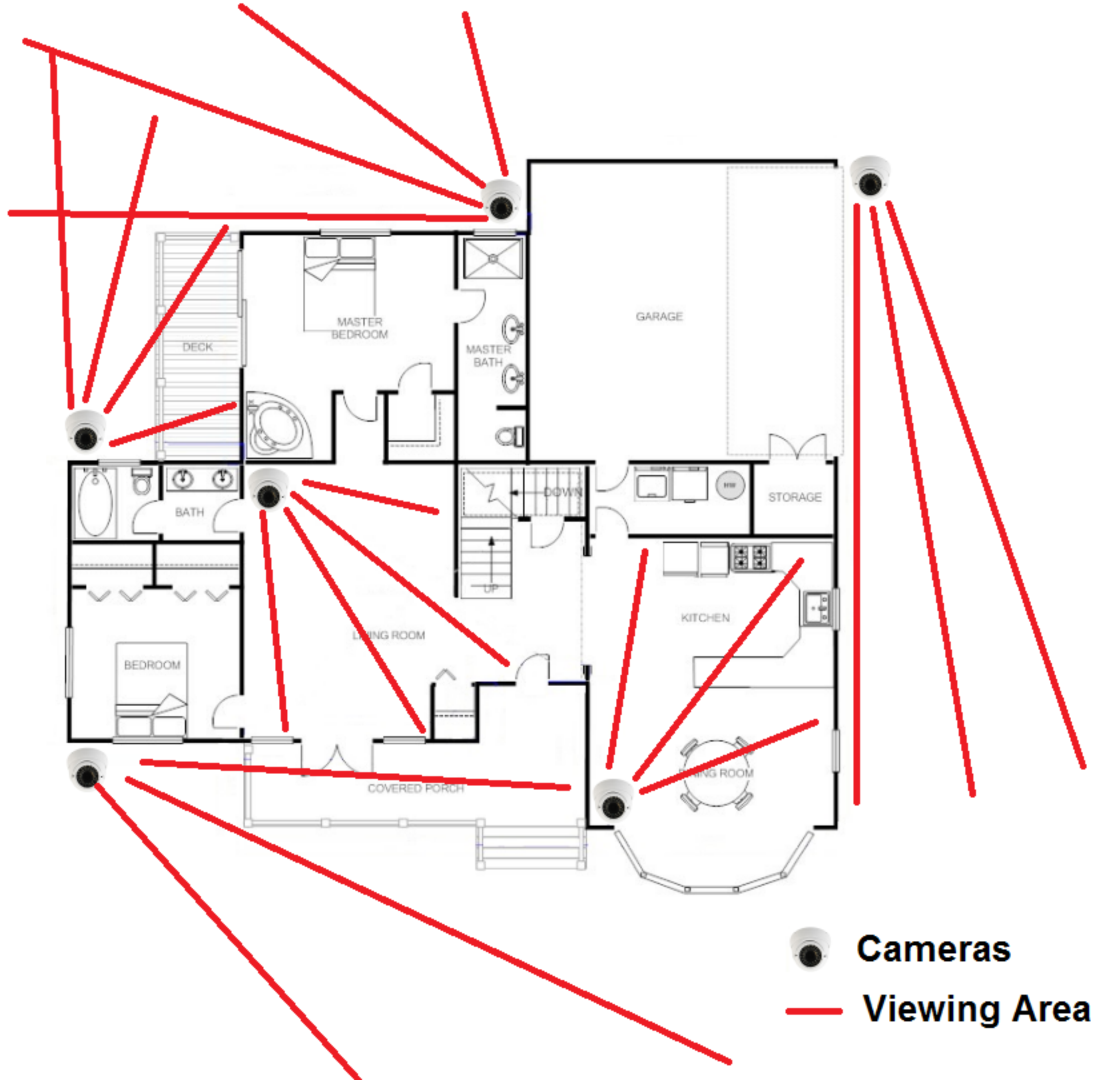
Ilustrasi dimensi metrik dari sebuah graf dengan dim(G) = 2

$r(u|W_1) = (2,2,1)$; $r(v|W_1) = (1,2,2)$; $r(w|W_1) = (0,1,1)$; $r(x|W_1) = (1,0,1)$; dan $r(y|W_1) = (1,1,0)$

$r(u|W_2) = (1,2)$; $r(v|W_2) = (0,1)$; $r(w|W_2) = (1,0)$; $r(x|W_2) = (2,1)$; dan $r(y|W_2) = (2,1)$.

$r(u|W_3) = (0,1)$; $r(v|W_3) = (1,0)$; $r(w|W_3) = (2,1)$; $r(x|W_3) = (2,2)$; dan $r(y|W_3) = (1,2)$.

Optimasi Penempatan Alat



Penempatan CCTCV

Sumber: Backstreet Surveillance

Himpunan Dominasi

DEFINISI

Titik v dalam graf G dikatakan mendominasi titik itu sendiri dan setiap titik yang bertetangga dengan v

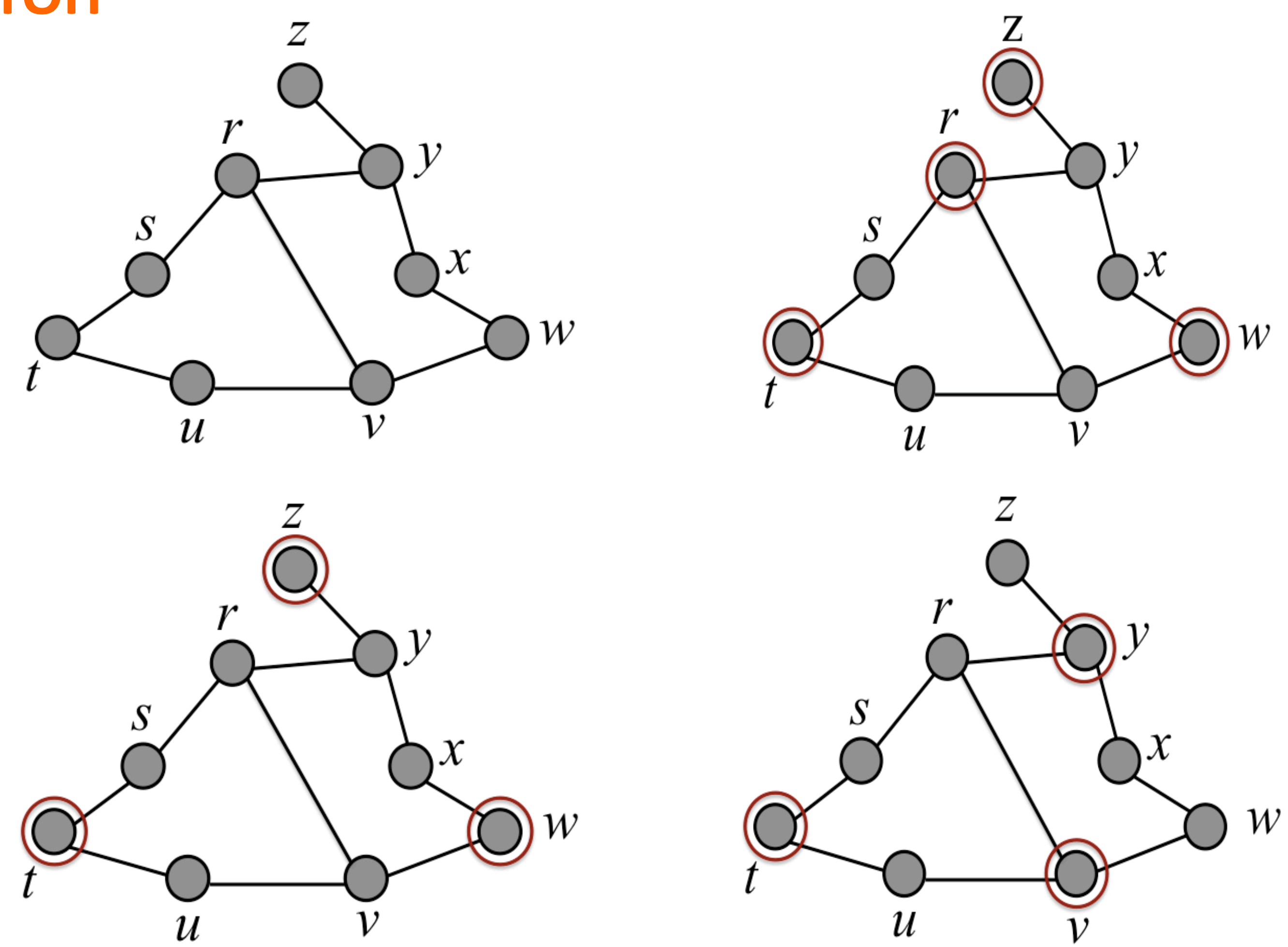
Himpunan $S \subseteq V(G)$ disebut **himpunan dominasi** dari G jika setiap titik dari G didominasi oleh paling sedikit satu titik dalam S.

Kardinalitas minimum di antara dominasi dari G disebut **bilangan dominasi** dari G.

(Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2010)

Himpunan Dominasi

CONTOH



Ilustrasi himpunan dominasi pada sebuah graf

Penutup

Jika nasib adalah titik,
dan usaha adalah sisi;
maka hidup adalah sebuah
graf. Tantangan kita adalah
bagaimana merangkai titik
dan sisi tersebut agar
tercipta sebuah graf yang
keindahannya dapat
dinikmati bersama


TERIMA KASIH